

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
CLASA A XII-A (M₁ 4 ore)
– ETAPA LOCALĂ –19.02.2015 –

SUBIECTUL I

Pe mulțimea $M = (0, \infty)$ se consideră legea de compoziție $\varphi: M \times M \rightarrow M$ notată cu $\varphi(x, y) = x * y$, care îndeplinește condițiile:

1. $(x + 1) * x = 1, (\forall)x \in M$;
2. $(xy) * z = x(y * z), (\forall)x, y, z \in M$, unde xy reprezintă produsul numerelor x și y .

Se cere:

- a. Să se calculeze $\sqrt{2} * (\sqrt{2} + 1)$;
- b. Să se studieze dacă φ este asociativă;
- c. Să se studieze dacă φ admite element neutru.

SUBIECTUL II

Să se calculeze $\int (e^{2x} - e^{-2x})^n \sqrt[n]{e^x - e^{-x}} dx, x > 0, n \in N, n \geq 2$.

SUBIECTUL III

Fie (G, \cdot) un grup. Arătați că dacă $f: G \rightarrow G, f(x) = x^{-1}$ este un automorfism al grupului G , atunci G este abelian.

SUBIECTUL IV

- a. Să se arate că $\ln(1 + x) \leq x, (\forall)x \geq 0$;
- b. Să se demonstreze că dacă $a > 0$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \frac{x^n}{a + x^n} dx = \ln \frac{a+1}{a}$.

NOTĂ : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.